ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-726-737

УДК 517.962.8

ТЕОРЕМА БОЛЯ–ПЕРРОНА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ И ЕЕ ОБРАЩЕНИЕ

© **П. М. Симонов**

ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
392000, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15
E-mail: rector@psu.ru

Аннотация. Рассматривается абстрактная гибридная система двух уравнений с двумя неизвестными: векторной функцией x, являющейся абсолютно непрерывной на каждом конечном отрезке $[0,T]$, $T > 0$, и последовательностью числовых векторов y. В исследовании применяется W-метод Н.В. Азбелева. В качестве модельной используется система, содержащая функционально-дифференциальное уравнение относительно x, и разностное уравнение относительно y. Изучены пространства решений. Для гибридной системы получена теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости и теорема об обращении.

Ключевые слова: теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости; гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений; метод модельных уравнений, теорема об обращении

Введение

Проблемам устойчивости решений линейных гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений стационарных ГЛФДСП. В этой работе получены необходимые и достаточное условия экспоненциальной устойчивости для систем вида

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$
$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h),$$
$$x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^k, \quad x_2(\tau) = \psi(\tau) \text{ при } \tau \in [-h, 0),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00332 А).

где $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\psi : [-h, 0) \to \mathbb{R}^{n-k}$ — кусочно-непрерывная вектор-функция.

Данная статья продолжает исследование, начатое в [2–7]. В работах [2–5] получена теорема Боля–Перрона для ГЛФСП в случае экспоненциальной устойчивости, в работах [6, 7] — для ГЛФДСП в случае асимптотической устойчивости.

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [8–10] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе свойства устойчивости решений. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ГЛФДСП, а именно, систем гибридных линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием, формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости, в частности, теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости для ГЛФДСП и теорема об обращении.

1. Схема W-метода

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $||\alpha||_{\mathbb{R}^n}$.

Обозначим через $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots$, являющимися векторами из пространства $\mathbb{R}^n$, а через $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ — бесконечную матрицу со столбцами $g(i) \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \ldots$. Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ сопоставим вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots .$$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots .$$

Пусть $[t]$ — целая часть действительного числа t. Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$, аналогично, символом $g[t]$ — вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$. Множество вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0, а множество вектор-функций $g[\cdot]$ — символом ℓ. Положим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geq 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0, 1)$.

В работе используются следующие пространства: пространство L локально суммируемых $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||f||_{L[0,T]} = \int\limits_0^T ||f(t)||_{\mathbb{R}^n}\, dt$ для всех $T > 0$; пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||x||_{D[0,T]} = ||\dot{x}||_{L[0,T]} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$, $T > 0$; пространство ℓ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ с полунормами $||g||_{\ell_T} = \sum\limits_{i=0}^{T} ||g_i||_{\mathbb{R}^n}$, $T > 0$; пространство ℓ_0 бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ с полунормами $||y||_{\ell_{0T}} = \sum\limits_{i=-1}^{T} ||y_i||_{\mathbb{R}^n}$, $T > -1$; $\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 : \ ||y||_{\ell_{\infty 0}} = \sup\limits_{k=-1,0,1,\cdots} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}$; $\ell_\infty = \{g \in \ell : \ ||g||_{\ell_\infty} = \sup\limits_{k=0,1,\cdots} ||g(k)||_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}$.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \tag{1}$$

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Пусть заданы банаховы пространства $\mathbf{D} \subset D$, $\mathbf{M}_0 \subset \ell_0$, $\mathbf{B} \subset L$, $\mathbf{M} \subset \ell$, и имеет место изоморфизм $\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \cong (\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbf{M} \times \mathbb{R}^n)$. Если все элементы $\{x, y\} \in \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0$ обладают какими-нибудь специфическими асимптотическими свойствами, например,

$$\sup_{t \geq 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n} + \sup_{k=-1,0,1,\ldots} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n} < \infty,$$

и задача Коши для уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \to \mathbf{B} \times \mathbf{M}$ однозначно разрешима, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами. Пусть модельное уравнение [8–10] $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство $\mathbf{B}$ выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть, кроме того, решение при любой правой части $z \in \mathbf{B}$ записывается в виде формулы Коши $x(t) = U_{11}(t)x(0) + (W_{11}z)(t)$. Определим банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ с нормой $||x||_{D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})} = ||\mathcal{L}_{11}x||_{\mathbf{B}} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$ (вложение $\mathbf{B} \subset L$ предполагается непрерывным). Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}$, и оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{B}$. Это условие эквивалентно (см. [9, 10, гл. IV]) тому, что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W^{(1)}_{\mathbf{B}}[0, \infty)$ с нормой $||x||_{W^{(1)}_{\mathbf{B}}[0,\infty)} = ||\dot{x}||_{\mathbf{B}} + ||x||_{\mathbf{B}}$. Будем обозначать это пространство символом $W_{\mathbf{B}}$. Справедливо $W_{\mathbf{B}} \subset D$, и это вложение непрерывно. Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to \mathbf{B}$ $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчиво [8], если для каждой правой части $z \in \mathbf{B}$ каждое решение x принадлежит $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$. Здесь $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$ — область определения оператора $\mathcal{L}_{11}$. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}) \cong W_{\mathbf{B}} \to \mathbf{B}$, удовлетворяющим вышеприведенному условию, $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчиво ($W_{\mathbf{B}}$-устойчиво) тогда и только тогда, когда оно сильно $\mathbf{B}$-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно $\mathbf{B}$-устойчиво, если для любого $z \in \mathbf{B}$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in \mathbf{B}$ и $\dot{x} \in \mathbf{B}$ (см. [8, 10, гл. IV, § 4.6]).

Операторы $\mathcal{L}_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \to \ell$ рассматриваются как приведения на пары $(D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}), \mathbf{B})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{B})$, $(D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}), \mathbf{M})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{M})$. Эти операторы предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши:

$$y[t] = (Y_{22}y(-1))[t] + (C_{22}g)[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]g[s], \quad t \geq 0.$$

Обозначим: $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$. Тогда (1) записывается в виде $\mathcal{L}\{x,y\} = \operatorname{col}\{f,g\}$. Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы

$$\mathcal{L}_{11}^0 x + \mathcal{L}_{12}^0 y = \dot{x} - F_{11}^0 x - F_{12}^0 y = z, \quad \mathcal{L}_{21}^0 x + \mathcal{L}_{22}^0 y = \Delta y - F_{21}^0 x - F_{22}^0 y = u,$$

где операторы $\mathcal{L}_{11}^0, F_{11}^0 : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}^0, F_{12}^0 : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}^0, F_{21}^0 : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}^0, F_{22}^0 : \ell_0 \to \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно записать в виде $\mathcal{L}_0\{x,y\} = \operatorname{col}\{z,u\}$. Пусть ее решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} : L \times \ell \to D \times \ell_0$ — непрерывный вольтерров оператор Коши модельной системы, $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to D \times \ell_0$ — ее фундаментальная матрица.

2. Теоремы Боля–Перрона

Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [11, 12], отмечались явления, которые в терминах $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$-устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}_{11}$ из $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$-устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_1)$-устойчивость, где $\mathbf{B}_1$ — некоторое подпространство пространства $\mathbf{B}$. Следуя традиции Пермского семинара [8–10], соответствующие утверждения будем называть *теоремами Боля–Перрона*. В основе следующих доказательств таких теорем лежат свойства подпространства $\mathbf{B} \subset L$, вытекающие из их *порядковой структуры*, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *частичную упорядоченность*: $\alpha = \operatorname{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \geq 0$, если $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$; $\alpha \geq \beta$, если, $\alpha - \beta \geq 0$. Через $|\alpha|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $|\alpha| = \operatorname{col}\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $||\cdot||_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством *монотонности*: $||\alpha||_{\mathbb{R}^n} \leq ||\beta||_{\mathbb{R}^n}$, если $|\alpha| \leq |\beta|$. В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *отношение порядка* в пространстве L. А именно $y \geq 0$, если $y(t) \geq 0$ почти всюду на $[0,\infty)$; $y \geq z$, если $y - z \geq 0$. Через $|y|$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0,\infty)$ определяемую равенством $|y|(t) = |y(t)|$. Относительно банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ будем предполагать, что норма в пространстве $\mathbf{B}$ согласована с порядком через условие *идеальности*: если $z \in L,\ \ y \in \mathbf{B}$ и $|z| \le |y|$, то $z \in \mathbf{B}$ и $||z||_{\mathbf{B}} \le ||y||_{\mathbf{B}}$. Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (*банаховых идеальных пространств* [13]), отметим следующие: 1) норма в таком пространстве $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонности; 2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства $\mathbf{B}$ имеет точные грани ($\mathbf{B}$ — K*–пространство*); 3) в пространстве $\mathbf{B}$ определены *“срезки”* — операторы умножения на характеристические функции χ_M измеримого множества $M \subset [0,\infty)$; 4) вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно.

3. Асимптотическая устойчивость

Введем подмножество $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}$ всех таких функций $z \in \mathbf{B}$, что для каждой функции z выполняется равенство $\lim\limits_{s\to\infty} ||\chi_{[s,\infty)} z||_{\mathbf{B}} = 0$. Иначе говоря, пространство $\mathbf{B}_0$ состоит из всех функций $z \in \mathbf{B}$, стремящихся при $t \to \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{B}$, причем нетрудно показать, что $\mathbf{B}_0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{B}$ и совпадает с замыканием по норме $||\cdot||_{\mathbf{B}}$ линейного многообразия всех финитных функций $z \in \mathbf{B}$.

Пусть далее C_0 — это подпространство пространства C, состоящее из всех таких $x \in C$, для которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, $||x||_{C_0} = ||x||_C$. Здесь и ниже C — пространство непрерывных и ограниченных функций $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_C = \sup\limits_{t\ge 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n}$.

Будем предполагать, что для пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}^0_{11} x = z$ выполнены условия:

а) оператор Коши W_{11} действует из пространства $\mathbf{B}_0$ в пространство C_0 и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} уравнения $\mathcal{L}^0_{11} x = 0$ принадлежат пространству C_0.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B}_0) \subset C_0$ и асимптотическая устойчивость первого модельного уравнения.

Лемма 1. *Имеет место непрерывное вложение* $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B}) \subset C$.

Таким образом, в указанных предположениях относительно пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения, $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B})$–устойчивость уравнения $\mathcal{L}_{11} x = z$ гарантирует устойчивость по Ляпунову, а $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B}_0)$–устойчивость — асимптотическую устойчивость.

Теорема 1. *Пусть уравнение* $\mathcal{L}_{11} x = f$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B})$*– устойчиво и оператор* $\mathcal{L} : \mathbf{D}(\mathcal{L}) \to L$ *действует из пространства* $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B}_0)$ *в пространство* $\mathbf{B}_0$. *Тогда это уравнение* $\mathbf{D}(\mathcal{L}^0_{11}, \mathbf{B}_0)$*– устойчиво.*

В условиях теоремы 1 уравнение $\mathcal{L}_{11} x = f$ асимптотически устойчиво.

Отметим, что для некоторых специальных классов уравнений аналоги теоремы 1 были получены ранее другими авторами (см. [14, 15, гл. 3, § 4, 4.1, 4.2], [16, 17, §§ 2.5, 5.1], [18–25]).

Предварительно сформулируем две леммы о свойствах линейного вольтеррова ограниченного оператора $\mathcal{Q}_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ и о разрешимости функционального уравнения $\mathcal{Q}_{11} z = f$ в пространстве $\mathbf{B}_0$.

Лемма 2. *Для линейного ограниченного вольтеррова оператора* $\mathcal{Q}_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *справедливо включение* $\mathcal{Q}_{11}^{*}\mathbf{B}_0^{*} \subset \mathbf{B}_0^{*}$.

Лемма 3. *Пусть линейный ограниченный оператор* $\mathcal{Q}_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *вольтерров и* $\mathcal{Q}_{11}\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0$. *Тогда если этот оператор имеет обратный оператор* $\mathcal{Q}_{11}^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, *то* $\mathcal{Q}_{11}^{-1}\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0$.

В виде замечания к лемме 3 укажем условия, при выполнении которых из включения $\mathcal{Q}_{11}\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0$ и обратимости сужения $\mathcal{Q}_{110} = \mathcal{Q}_{11}|_{\mathbf{B}_0} : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_0$ следует обратимость оператора $\mathcal{Q}_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$.

Предположим, что пространство $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонной полноты нормы (свойством (B)) ([13, гл. IV, § 3, 3.2, гл. X, § 4, 4.1], [26, c. 143]): если для $z_k \in \mathbf{B}$ при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $z_{k+1} \geq z_k \geq 0$ и $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|z_k\|_{\mathbf{B}} < \infty$, то существует такой элемент $z \in \mathbf{B}$, что $z_k(t) \to z(t)$ почти всюду на $[0,\infty)$, причем $\|z\|_{\mathbf{B}} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|z_k\|_{\mathbf{B}}$.

Предположим, далее, что линейный регулярный оператор $\mathcal{Q}_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ удовлетворяет условию порядковой непрерывности ([13, гл. X, § 2, 2.1]): если $f_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ для почти всех $t \in [0,\infty)$, $|f_n| \leq g \in \mathbf{B}$, то $(Q_{11}f_n)(t) \to 0$ при $n \to \infty$ для почти всех $t \in [0,\infty)$.

Отметим, что условию порядковой непрерывности удовлетворяют линейные регулярные интегральные операторы и линейные операторы внутренней суперпозиции — два основных в приложениях класса линейных операторов.

В этих предположениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть пространство* $\mathbf{B}$ *обладает свойством монотонной полноты нормы (свойством* (B) *) и линейный регулярный вольтерров оператор* $\mathcal{Q}_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *удовлетворяет условию порядковой непрерывности. Если справедливо* $\mathcal{Q}_{11}\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0$ *и обратимо сужение* $\mathcal{Q}_{110} = \mathcal{Q}_{11}|_{\mathbf{B}_0} : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_0$, *то оператор* $\mathcal{Q}_{11} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *обратим.*

Близкие результаты содержится в монографии [27, Ch. III, 3.2.6, 3.2.7].

Теорема 1 допускает обращение.

Теорема 2. *Пусть пространство* $\mathbf{B}$ *обладает свойством монотонной полноты нормы (свойством* (B) *) и оператор* $\mathcal{Q}_{11} = \mathcal{L}_{11}W_{11}$ *регулярен и удовлетворяет условию порядковой непрерывности. Тогда эквивалентны утверждения:*

а) уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)-$ *устойчиво;*

б) уравнение $\mathcal{L}_{11}x = f$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})-$ *устойчиво и оператор* $\mathcal{L} : \mathbf{D}(\mathcal{L}) \to \mathbf{L}$ *действует из пространства* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$ *в пространство* $\mathbf{B}_0$.

Определим банахово пространство всех функций $g \in \ell_\infty^0 \subset \ell_\infty$ $(g \in \ell_{\infty\,0}^0 \subset \ell_{\infty\,0})$ таких, что для каждой функции g выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} ||\chi_{[n,\infty)}g||_{\ell_\infty} = 0 \qquad (\lim_{n\to\infty} ||\chi_{[n,\infty)}g||_{\ell_{\infty\,0}} = 0).$$

Введем банахово пространство $\mathbf{b} \subset \ell$ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ с нормой $||g||_{\mathbf{b}}$, а также определим банахово пространство $\mathbf{b}_0 \subset \ell_0$ бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ с нормой $||y||_{\mathbf{b}_0}$. Вложение $\mathbf{b} \subset \ell$ $(\mathbf{b}_0 \subset \ell_0)$

непрерывно. Пусть для пространств $\mathbf{b}, \mathbf{b}_0$ выполнены все предыдущие условия п. 3. Определим подмножество $\mathbf{b}^0 \subset \mathbf{b}$ всех таких функций $g \in \mathbf{b}$, что для каждой функции g выполняется равенство $\lim\limits_{s\to\infty} ||\chi_{[s,\infty)}g||_{\mathbf{b}} = 0$. Здесь и ниже χ_M — характеристическая функция множества $M \subset \mathbb{N}\cup 0$. Иначе говоря, пространство $\mathbf{b}^0$ состоит из всех функций $g \in \mathbf{b}$, стремящихся при $t \to \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{b}$. Нетрудно показать, что $\mathbf{b}^0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $||\cdot||_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g \in \mathbf{b}$. Аналогично определяем пространство $\mathbf{b}_0^0$.

Далее будем предполагать, что для пространства $\mathbf{b}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = u$ выполнены условия:

а) оператор Коши W_{22} действует из пространства $\mathbf{b}^0$ в пространство $\ell_{\infty\, 0}^0$ и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} уравнения $\mathcal{L}_{22}^0 y = 0$ принадлежат пространству $\ell_{\infty\, 0}^0$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^0) \subset \ell_{\infty\, 0}^0$ и асимптотическая устойчивость второго модельного уравнения.

Лемма 5. *Имеет место непрерывное вложение* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \subset \ell_{\infty\, 0}$.

Предположим, что линейный оператор $\mathcal{Q}_{22} : \mathbf{b} \to \mathbf{b}$ регулярен. В этом случае оператор $\mathcal{Q}_{22}$ удовлетворяет условию порядковой непрерывности ([13, гл. X, § 2, 2.1]): если $g_n(m) \to 0$ всюду для $m \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ при $n \to \infty$, $|g_n| \le g \in \mathbf{b}$, то $(\mathcal{Q}_{22} g_n)(m) \to 0$ всюду для $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ при $n \to \infty$.

Сформулируем распространение теоремы Боля–Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \{f, g\}$.

Теорема 3. *Пусть операторы* $\mathcal{L}_{12} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \to \mathbf{B}$, $\mathcal{L}_{21} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \to \mathbf{b}$ *регулярны, причем* $\mathcal{L}_{12}(\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})) \subset \mathbf{B}$, $\mathcal{L}_{21}(\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})) \subset \mathbf{b}$. *Предположим, что уравнение* $\mathcal{L}_{11} x = f$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})-$ *устойчиво и уравнение* $\mathcal{L}_{22} y = g$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b})-$ *устойчиво, а операторы* $\mathcal{L}_{11} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}) \to L$, $\mathcal{L}_{22} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}) \to \ell$ *регулярны из пространства* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}_0)$ *и* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}^0)$ *в пространства* $\mathbf{B}_0$ *и* $\mathbf{b}^0$. *Пусть банаховы пространства* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{b}$ *обладают свойством монотонной полноты нормы (свойством* (B)), *операторы* $\mathcal{L}_{11} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$, $\mathcal{L}_{12} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{22}^0, \mathbf{b}) \to \mathbf{B}$, $\mathcal{L}_{21} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B}) \to \mathbf{b}$, $\mathcal{L}_{22} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_{2}^0, \mathbf{b}) \to \mathbf{b}$ *порядково непрерывны. Пусть, далее, уравнение* $\mathcal{L}_1 x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12} C_{22} \mathcal{L}_{21}) x = f_1$ $\mathbf{D}(\mathcal{L}_{11}^0, \mathbf{B})$ – *устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_1 W_{11} : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_0$ *ограничен и порядково непрерывен.*

Тогда эквивалентны утверждения:

a) уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ *является* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}_0 \times \mathbf{b}^0)-$ *устойчивым;*

b) уравнение $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ *является* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B} \times \mathbf{b})-$ *устойчивым.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.* Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 728-740.

2. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона для гибридных линейных систем с последействием // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 2 (33). С. 56-60.

3. *Симонов П.М.* К вопросу о теореме Боля–Перрона для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 1. С. 75-81.

4. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона для гибридных линейных систем с последействием // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 122-126.

5. *Simonov P.M.* The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. № 5. P. 775-781.

6. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) // Вестник Российской академии естественных наук. 2016. Т. 16. № 3. С. 55-59.

7. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конф., посвящ. 95-летию со дня рождения проф. Н.В. Азбелева. Пермь: ПНИПУ, 2018. С. 230-235.

8. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 196-204.

9. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1659-1668.

10. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Перм. ун-т, 2001. 230 с.

11. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.

12. *Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.

13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. 4-е изд., испр. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. 816 с.

14. *Носов В.Р.* Теорема Перрона для стационарных и периодических систем дифференциально-функциональных уравнений // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом / Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы. М., 1979. Т. 11. С. 44-51.

15. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.

16. *Курбатов В.Г.* Об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 6. С. 963-972.

17. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. 168 с.

18. *Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б.* К вопросу о допустимости некоторых пар пространств для линейных операторов и уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 4. С. 684-692.

19. *Пуляев В.Ф.* О допустимости некоторых пар пространств относительно линейных интегральных уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 10. С. 1800-1805.

20. *Пуляев В.Ф.* О спектре линейных непрерывных операторов // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1985. № 4. С. 25-28.

21. *Пуляев В.Ф.* О спектре операторов Вольтерра // Интегральные операторы и уравнения: сб. науч. тр. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1987. С. 29-37.

22. *Пуляев В.Ф.* О взаимосвязи нетеровости линейных непрерывных операторов и их сужений // Известия высших учебных заведений. Математика. 1990. № 8 (339). С. 65-73.

23. *Пуляев В.Ф.* Развитие теории линейных интегральных уравнений с периодическими и почти периодическими ядрами: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2001. 31 с.

24. *Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б.* Об асимптотическом поведении решений интегральных уравнений Вольтерра в банаховых пространствах // Известия высших учебных заведений. Математика. 1991. № 12 (355). С. 47-55.

25. *Сокол Д.Г.* О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки. 2000. № 1. С. 135-137.

26. *Бухвалов А.В., Векслер А.И., Лозановский Г.Я.* Банаховы решетки – некоторые банаховы аспекты теории // Успехи математических наук. 1979. Т. 34. Вып. 2 (206). С. 137-183.

27. *Kurbatov V.G.* Functional differential operators and equations. Dordrect: Kluwer Academic Publ., 1999. 433 p.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 25 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Симонов Петр Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simpm@mail.ru

Для цитирования: *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем и ее обращение // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 726–737. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-726-737

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-726-737

THE THEOREM OF BOHL–PERRON ON THE ASIMPTOTIC STABILITY OF HYBRID SYSTEMS AND INVERSE THEOREM

P. M. Simonov

Perm State National Research University
15 Bukirev St., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: simpm@mail.ru

Abstract. We consider an abstract hybrid system of two equations with two unknowns: a vector function x that is absolutely continuous on each finite interval $[0,T]$, $T>0$, and a sequence of numerical vectors y. The study uses the W-method N.V. Azbelev. As a model, a system containing a functional differential equation with respect to x is used, and a difference equation with respect to y. Solutions spaces are studied. For a hybrid system, the Bohl–Perron theorem on asymptotic stability and the converse theorem are obtained.

Keywords: the theorem of Bohl–Perron about the asymptotic stability; hybrid linear system of functional differential equations; method of the model equations, converse theorem

REFERENCES

1. Marchenko V.M, Luazo J.J. Ob ustoychivosti gibridnykh differentsial'no-raznostnykh sistem [On the stability of hybrid difference-differential systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 728-740. (In Russian).

2. Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona dlya gibridnykh lineynykh sistem s posledeystviyem [Theorem of Bohl–Perron of hybrid linear functional differential systems with aftereffect]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2016, no. 2 (33), pp. 56-60. (In Russian).

3. Simonov P.M. K voprosu o teoreme Bolya–Perrona dlya gibridnykh lineynykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem s posledeystviyem (GLFDSP) [On the question of the theorem of Bohl–Perron of hybrid linear functional differential systems with aftereffect (HLFDSA)]. *Zhurnal Sredne-volzhskogo matematicheskogo obshchestva – Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2016, vol. 18, no. 1, pp. 75-81. (In Russian).

4. Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona dlya gibridnykh lineynykh sistem s posledeystviyem [The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i eye prilozheniya. Tematicheskiye obzory – Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 132, pp. 122-126. (In Russian).

5. Simonov P.M. The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 775-781.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00332 A).

6. Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona ob asimptoticheskoy ustoychivosti dlya gibridnykh lineynykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem s posledeystviyem (GLFDSP) [Theorem of Bohl–Perron on asymptotic stability of hybrid linear functional differential systems with aftereffect (HLFDSA)]. *Vestnik Rossiyskoy akademii estestvennykh nauk – Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 55-59. (In Russian).

7. Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona ob asimptoticheskoy ustoychivosti gibridnykh sistem [The Bohl–Perron theorem on the asymptotic stability of hybrid systems]. *Materialy konferentsii «Funktsional'no-differentsial'nyye uravneniya: teoriya i prilozheniya», posvyashchennoy 95-letiyu so dnya rozhdeniya professora N.V. Azbeleva* [Proceedings of the Conference "Functional and Differentional Equations: Theory and Applications" Dedicated to the 95th Anniversary of Professor N.V. Azbleev]. Perm, 2018, pp. 230-235. (In Russian).

8. Azbelev N.V., Berezanskiy L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Ustoychivost' lineynykh sistem s posledeystviyem. IV [Stability of linear systems with aftereffect. IV]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 2, pp. 196-204. (In Russian).

9. Azbelev N.V., Berezanskiy L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Ustoychivost' lineynykh sistem s posledeystviyem. III [Stability of linear systems with aftereffect. III]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 10, pp. 1659-1668. (In Russian).

10. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoychivost' resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi* [Stability of Equations Solutions with Ordinary Derivatives]. Perm, Perm State University Publ., 2001, 230 p. (In Russian).

11. Barbashin E.A. *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti* [Introduction to the Stability Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 224 p. (In Russian).

12. Massera J.L., Schaffer J.J. *Lineynyye differentsial'nyye uravneniya i funktsional'nyye prostranstva* [Linear Differential Equations and Function Spaces]. Moscow, Mir Publ., 1970, 456 p. (In Russian).

13. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. St. Petersburg, Nevskiy Dialekt Publ., BKHV-Peterburg Publ., 2004, 816 p. (In Russian).

14. Nosov V.R. Teorema Perrona dlya statsionarnykh i periodicheskikh sistem differentsial'no-funktsional'nykh uravneniy [Perron's theorem for stationary and periodic systems of differential functional equations]. *Differentsial'nyye uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom* [Differential Equations with Deviating Argument]. Moscow, 1979, vol. 11, pp. 44-51. (In Russian).

15. Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R. *Ustoychivost' i periodicheskiye rezhimy reguliruyemykh sistem s posledeystviyem* [Stability and Periodic Regimes Controlled Systems with Aftereffect]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 448 p. (In Russian).

16. Kurbatov V.G. Ob ustoychivosti funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On functional differential equations stability]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1981, vol. 17, no. 6, pp. 963-972. (In Russian).

17. Kurbatov V.G. *Lineynyye differentsial'no-raznostnyye uravneniya* [Linear Differential Equations]. Voronezh, Voronezh University Publ., 1990, 168 p. (In Russian).

18. Pulyaev V.F., Tsalyuk Z.B. K voprosu o dopustimosti nekotorykh par prostranstv dlya lineynykh operatorov i uravneniy Vol'terra [On the issue of the admissibility of certain spaces pairs for linear operators and the Volterra equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1983, vol. 19, no. 4, pp. 684-692. (In Russian).

19. Pulyaev V.F. O dopustimosti nekotorykh par prostranstv otnositel'no lineynykh integral'nykh uravneniy Vol'terra [On the admissibility of some pairs of spaces according to linear integral Volterra equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1984, vol. 20, no. 10,

pp. 1800-1805. (In Russian).

20. Pulyaev V.F. O spektre lineynykh nepreryvnykh operatorov [On the spectrum of linear continuous operators]. *Izvestiya Severo-Kavkazskogo nauchnogo tsentra vysshey shkoly. Estestvennyye nauki – Izvestiya of the North Caucasus Scientific Centre of the Higher School. Natural Science*, 1985, no. 4, pp. 25-28. (In Russian).

21. Pulyaev V.F. O spektre operatorov Vol'terra [On the spectrum of Volterra operators]. *Sbornik nauchnykh trudov «Integral'nyye operatory i uravneniya»* [Proceedings of Scientific Works "Integral Operators and the Equation"]. Krasnodar, Kuban State University Publ., 1987, pp. 29-37. (In Russian).

22. Pulyaev V.F. O vzaimosvyazi neterovosti lineynykh nepreryvnykh operatorov i ikh suzheniy [On interrelation of Noetherian linear continuous operators and their restrictions]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1990, no. 8 (339), pp. 65-73. (In Russian).

23. Pulyaev V.F. *Razvitiye teorii lineynykh integral'nykh uravneniy s periodicheskimi i pochti periodicheskimi yadrami: avtoref. dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk* [Theory of Linear Integral Equations with Periodic and Almost Periodic Kernels Development. Dr. phys.-math. sci. diss. abstr.]. St. Petersburg, 2001, 31 p. (In Russian).

24. Pulyaev V.F., Tsalyuk Z.B. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy integral'nykh uravneniy Vol'terra v banakhovykh prostranstvakh [On the asymptotic behavior of solutions of integral Volterra equations in Banach spaces]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1991, no. 12 (355), pp. 47-55. (In Russian).

25. Sokol D.G. O dopustimosti nekotorykh par prostranstv dlya integral'nykh operatorov i uravneniy [On the admissibility of certain space pairs for integral operators and equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: estestvennyye nauki – University News North-Caucasian Region. Natural Sciences Series*, 2000, no. 1, pp. 135-137. (In Russian).

26. Bukhvalov A.V., Veksler A.I., Lozanovskiy G.Ya. Banakhovy reshetki – nekotoryye banakhovy aspekty teorii [Banach lattices – some Banach theory aspects]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1979, vol. 34, no. 2 (206), pp. 137-183. (In Russian).

27. Kurbatov V.G. *Functional Differential Operators and Equations.* Dordrect, Kluwer Academic Publ., 1999, 433 p.

Received 20 April 2018
Reviewed 25 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Simonov Pyotr Mikhailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, e-mail: simpm@mail.ru

For citation: Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona ob asimptoticheskoy ustoychivosti gibridnykh sistem i yeyo obrashcheniye [The theorem of Bohl–Perron on the asymptotic stability of hybrid systems and inverse theorem]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 726–737. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-726-737 (In Russian, Abstr. in Engl.).